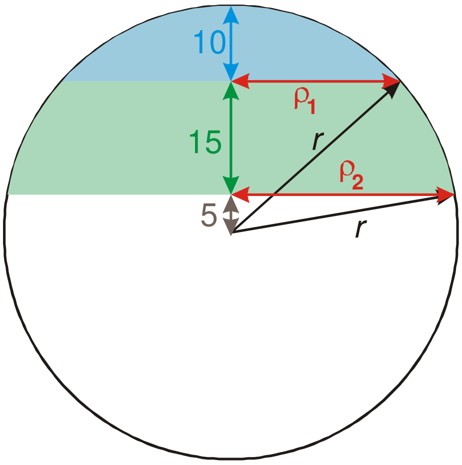
5.4.7 Objemy a povrchy rotačních těles II

Předpoklady: 050406

Př. 1: V legendárním filmu Kill Bill Volume One při známé scéně v Domě modrých listů, kde Nevěsta (Beatrix Kiddo) rozseká 127 členů Šílené Osmaosmdesátky včetně osobních strážců O-Ren Ishii, porazí hlavní hrdinka také meloun kulového tvaru, který rozsekne dvěma vodorovnými seky svého meče od Hattori Hanza (zřejmý odkaz na způsob, kterým později zabije O-Ren Ishii). Vypočti, jaký objem melounu odsekne a podle svého známého výroku: „Můžete odejít, ale vaše údy tu nechte, náleží mě.“ si i odnese domů, pokud měl meloun průměr 60 cm a první sek šel 10 cm pod jeho špičkou, druhý pak o 15 cm níže.

Dva seky oddělí z melounu dvě části – kulovou úseč a kulovou vrstvu. Nakreslíme obrázek melounu.



Potřebujeme vypočítat poloměry ρ_1 a ρ_2. Oba poloměry je možné vypočíst z odpovídajícího pravoúhlého trojúhelníku na obrázku:

ρ_1: $\rho_1^2 = r^2 - 20^2 = 30^2 - 20^2 = 500 \Rightarrow \rho_1 = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

ρ_2: $\rho_2^2 = r^2 - 5^2 = 30^2 - 5^2 = 875 \Rightarrow \rho_2 = \sqrt{875} = 5\sqrt{35}$

Můžeme dosadit do vzorců:

Kulová úseč: $V = \frac{\pi v}{6}\left(3\rho^2 + v^2\right) = \frac{\pi \cdot 10}{6}\left[3\left(10\sqrt{5}\right)^2 + 10^2\right]\text{cm}^3 = 8377\,\text{cm}^3 = 8{,}4\,\text{dm}^3$

Kulová vrstva:

$V = \frac{\pi v}{6}\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right) = \frac{\pi \cdot 15}{6}\left[3\left(10\sqrt{5}\right)^2 + 3\left(5\sqrt{35}\right)^2 + 15^2\right]\text{cm}^3 = 34\,165\,\text{cm}^3 \doteq 34{,}1\,\text{dm}^3$

Beatrix Kiddo si odnese domů celkem 42,5 litru melounu.

Př. 2: Plastový pivní kelímek má tvar komolého kužele o poloměrech podstav 4 cm a 5 cm a výšce 8 cm. Urči jeho skutečný objem, pokud je zcela zaplněný.

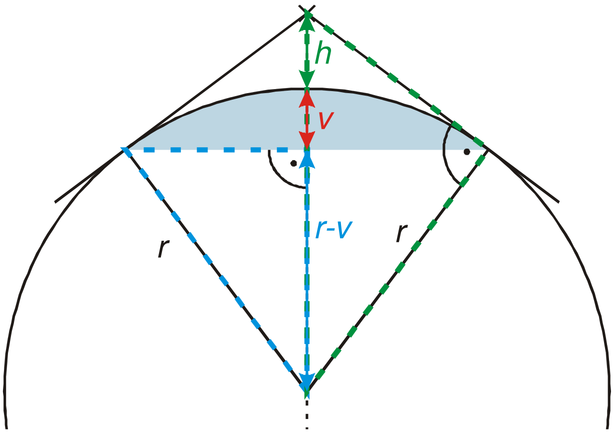
Vzorec pro objem komolého rotačního kužele: $V = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

Dosadíme: $V = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{\pi \cdot 8}{3}\left(5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2\right)\text{cm}^3 = 511\,\text{cm}^3$

Zcela zaplněný plastový pivní kelímek má objem $511\,\text{cm}^3$.

Př. 3: Jaká část zemského povrchu je vidět z orbitální stanice ISS ve výšce 360 km nad povrchem Země?.

Nakreslíme obrázek situace.



Viditelná část zemského povrchu tvoří vrchlík $\Rightarrow$ potřebujeme určit jeho výšku.
Na obrázku jsou vyznačeny dva podobné pravoúhlé trojúhelníky, z jejich podobnosti platí:

$$\frac{r-v}{r}=\frac{r}{r+h}$$

$$r-v=\frac{r^2}{r+h}$$

$$v=r-\frac{r^2}{r+h}$$

Dosadíme: $v=r-\frac{r^2}{r+h}=6378-\frac{6378^2}{6378+360}\,\text{km}=341\,\text{km}$.

Povrch vrchlíku: $S=2\pi rv=2\pi\cdot 6378\cdot 341\,\text{km}^2=13700000\,\text{km}^2$.

Celková plocha Země: $S=4\pi r^2=4\pi\cdot 6378^2\,\text{km}^2=511000000\,\text{km}^2$.

100%	…	511000000
x%	…	13700000

$$\frac{x}{13700000}=\frac{100}{511000000}$$

$$x=13700000\frac{100}{511000000}=2{,}68$$

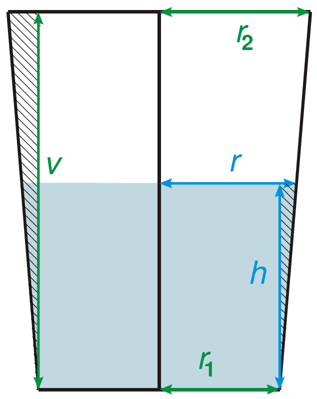
Z orbitální stanice ISS je vidět plocha $13700000\,\text{km}^2$, což je 2,68% zemského povrchu.

Př. 4: Plastový pivní kelímek má tvar komolého kužele o poloměrech podstav 4 cm a 5 cm a výšce 8 cm. V kelímku zbývá 0,25 l piva. Jak vysoko dosahuje hladina piva?

Hladina vystoupá do výšky h, vodní hladina pak bude mít poloměr r.

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$$

Ve vzorci jsou dvě neznámé $\Rightarrow$ musíme najít jejich vzájemný vztah a jednu vyjádřit pomocí druhé.



Z obrázku je vidět, že díky podobnosti trojúhelníků platí: $\frac{r_2 - r_1}{v} = \frac{r - r_1}{h}$.

$$h\frac{r_2 - r_1}{v} + r_1 = r$$

Je zřejmé, že budeme muset dosazovat do neupraveného vzorce $\Rightarrow$ dosadíme i do vztahu pro r a zjednodušíme si rovnici: $r = h\frac{r_2 - r_1}{v} + r_1 = h\frac{5-4}{8} + 4 = \frac{h}{8} + 4$

Nyní dosadíme do vzorce pro objem, za objem dosazujeme $250\,\text{cm}^3$:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r + r^2\right)$$

$$250 = \frac{\pi h}{3}\left[4^2 + 4\left(\frac{h}{8} + 4\right) + \left(\frac{h}{8} + 4\right)^2\right]$$

$$250 = \frac{\pi h}{3}\left[16 + \frac{h}{2} + 16 + \frac{h^2}{64} + 2\frac{h}{8}4 + 16\right]$$

$$250 = \frac{\pi h}{3}\left[48 + \frac{3h}{2} + \frac{h^2}{64}\right]$$

$$48000 = 3072\pi h + 96\pi h^2 + \pi h^3$$

$$\pi h^3 + 96\pi h^2 + 3072\pi h - 48000 = 0$$

Kubická rovnice, nemáme žádný vzorec (i když existuje), necháme výpočet na kalkulačce nebo matematickém programu, získáme pouze jeden reálný kořen: $x_1 = 4{,}354238103\,\text{cm}$.

Platí tedy: $h = 4{,}354238103\,\text{cm}$.

Můžeme dopočítat i poloměr hladiny piva:

$$r = \frac{h}{8} + 4 = \frac{4{,}354238103}{8} + 4\,\text{cm} = 4{,}544279763\,\text{cm}$$

Provedeme kontrolu: $V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r + r^2\right)$.

$$V = \frac{\pi \cdot 4{,}354238103}{3}\left(4^2 + 4 \cdot 4{,}544279763 + 4{,}544279763^2\right)\text{cm}^3 = 250\,\text{cm}^3$$

Pokud je v kelímku 0,25 l piva, hladina vystoupá do výšky 4,35 cm.

Př. 5: Najdi změnu postupu řešení předchozího příkladu, která umožňuje se vyhnout řešení kubické rovnice.

Na počátku řešení jsme se rozhodovali, kterou z neznámých r a h vyjádříme ze vztahu $\frac{r_2 - r_1}{v} = \frac{r - r_1}{h}$. Zkusíme vyjádřit neznámou h (místo r v původním řešení).

$$h = v\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Dosadíme do vzorce: $V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r + r^2\right)$.

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{(r-r_1)v}{r_2 - r_1}\left(r_1^2 + r_1 r + r^2\right)$$

Zdánlivě stejně beznadějná situace jako v předchozím příkladu (po roznásobení závorek vznikne kubická rovnice pro *r*).

Druhý pohled: závorky $(r-r_1)\left(r_1^2 + r_1 r + r^2\right)$ připomínají rozklad mnohočlenu $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Upravíme $V = \frac{\pi v}{3(r_2 - r_1)}(r-r_1)\left(r_1^2 + r_1 r + r^2\right) = \frac{\pi v}{3(r_2 - r_1)}\left(r^3 - r_1^3\right)$.

Zcela jiná situace. Neznámá *r* se vyskytuje pouze jednou $\Rightarrow$ je možné ji klasicky vyjádřit.

$$V = \frac{\pi v}{3(r_2 - r_1)}\left(r^3 - r_1^3\right)$$

$$r^3 - r_1^3 = \frac{3V(r_2 - r_1)}{\pi v}$$

$$r^3 = \frac{3V(r_2 - r_1)}{\pi v} + r_1^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V(r_2 - r_1)}{\pi v} + r_1^3} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 250(5-4)}{\pi \cdot 8} + 4^3}\ \text{cm} = 4{,}54\ \text{cm}$$

Pedagogická poznámka: Když mě kolegyně Hladíková na možnost elegantnějšího řešení upozornila, chvíli jsem uvažoval o nahrazení původního řešení příkladu 4. Nakonec jsem ho nechal. Jde o nenásilnou ukázku existence tohoto typu rovnic i možnosti jejich řešení a hlavně i v případě, že by studenti zvolili vyjádření neznámé *h* je podle mě docela malá pravděpodobnost, že by si použitého rozkladu na součin všimli. Proto bych doporučoval na trik upozornit i zbytek třídy, který s příkladu 5 nedostane.

Př. 6: Petáková:
strana 97, cvičení 67 a) b)
strana 98, cvičení 81
strana 98, cvičení 88

Shrnutí: